

## ROZHODOVÁNÍ VE FUZZY PROSTŘEDÍ

V. Konečný

Došlo: 30. června 2007

### Abstract

KONEČNÝ, V.: *Decision making in fuzzy environment*. Acta univ. agric. et silvic. Mendel. Brun., 2007, LV, No. 6, pp. 227–232

This paper is attended on simple method for support decision process in their final stage, i.e. by selection of suitable variant, from a set acceptable variant and by using fuzzy sets. In this entry are presented two approaches to solution: one without acceptance of weights point of view selection and second with acceptance weights point of view selection, including a method easy determination weights view points. Approaches are documented with sample decision making about choice new product for extension of produce. As a view points were selected: costs realization, time realization, employment increase, benefit, environmental impact.

decision process, selection variant, fuzzy set, decision view points, weights decision view points

Závěrečná fáze rozhodovacího procesu představuje volbu varianty. Mnohdy je nutno provést tuto volbu na základě kritérií a cílů, které jsou formulovány pomocí vágních pojmů. Například rozhodnutí týkající se firem bývají podmiňována dosažením velkého zisku, co nejmenších nákladů, malé pracnosti, rychlé realizace rozhodnutí atd.

Využití fuzzy množin, stejně jako i další metody z oblasti umělé inteligence, patří v současné době k moderním směrům (Rábová a kol., 2005) podpory rozhodovacích procesů v podmínkách nejistoty.

### METODIKA ŘEŠENÍ

#### Výběr varianty bez akceptování vah cílů a podmínek

V obecné rovině rozhodování představuje volbu varianty řešení problému z množiny přípustných variant. Necht' množina přípustných variant rozhodnutí je  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Varianty se hodnotí podle hledisek  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  a ke každému hledisku je stanoven cíl  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$  nebo omezující podmínka  $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$  a nebo obojí.

Problém praktického rozhodování bývá často v tom, že jak cíle, tak i podmínky nebývají formulovány přesně, ale poněkud *zamlženě*, pomocí vágních pojmů.

Necht' například jedním z hledisek hodnocení je *zisk*, pak jako cíl může být požadavek dosažení *spíše vysokého zisku*. Taková formulace cíle nebo podmínky znamená, že ani podmnožiny variant  $R_{c_i}$  a  $R_{p_j}$  nemohou být vymezeny přesně, ale pouze určitým stupněm jistoty pro každou variantu, tj. jako fuzzy množiny. Je tedy očividné, že řešení této rozhodovací úlohy bude probíhat ve fuzzy prostředí.

Výsledkem řešení úlohy je nalezení takové fuzzy podmnožiny variant  $R$ , která splňuje všechny cíle  $c_i$  a podmínky výběru  $p_j$ , tj.

$$R = \bigcap_i^r R_{c_i} \cap \bigcap_j^s R_{p_j}, \quad (1)$$

kde

$$R_{c_i} = \{[\mu_{c_i}^h(v_1), v_1]; [\mu_{c_i}^h(v_2), v_2]; \dots; [\mu_{c_i}^h(v_n), v_n]\}, \quad (2)$$

$$R_{p_j} = \{[\mu_{p_j}^h(v_1), v_1]; [\mu_{p_j}^h(v_2), v_2]; \dots; [\mu_{p_j}^h(v_n), v_n]\}, \quad (3)$$

jsou fuzzy množiny vytvořené na univerzu  $V$ .  $R_{c_i}$  odráží plnění cíle  $c_i$ ,  $R_{p_j}$  – plnění podmínky  $p_j$  a  $h \in H$  je hledisko, z jehož pohledu je formulován cíl  $c_i$  a podmínka  $p_j$ . Je-li nalezena fuzzy množina

$$R = \{(v_1, \mu_1); (v_2, \mu_2); \dots; (v_n, \mu_n)\}, \quad (4)$$



pak pro nejlepší variantu  $v_x \in R$  platí, že

$$v_x = \max(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n). \quad (5)$$

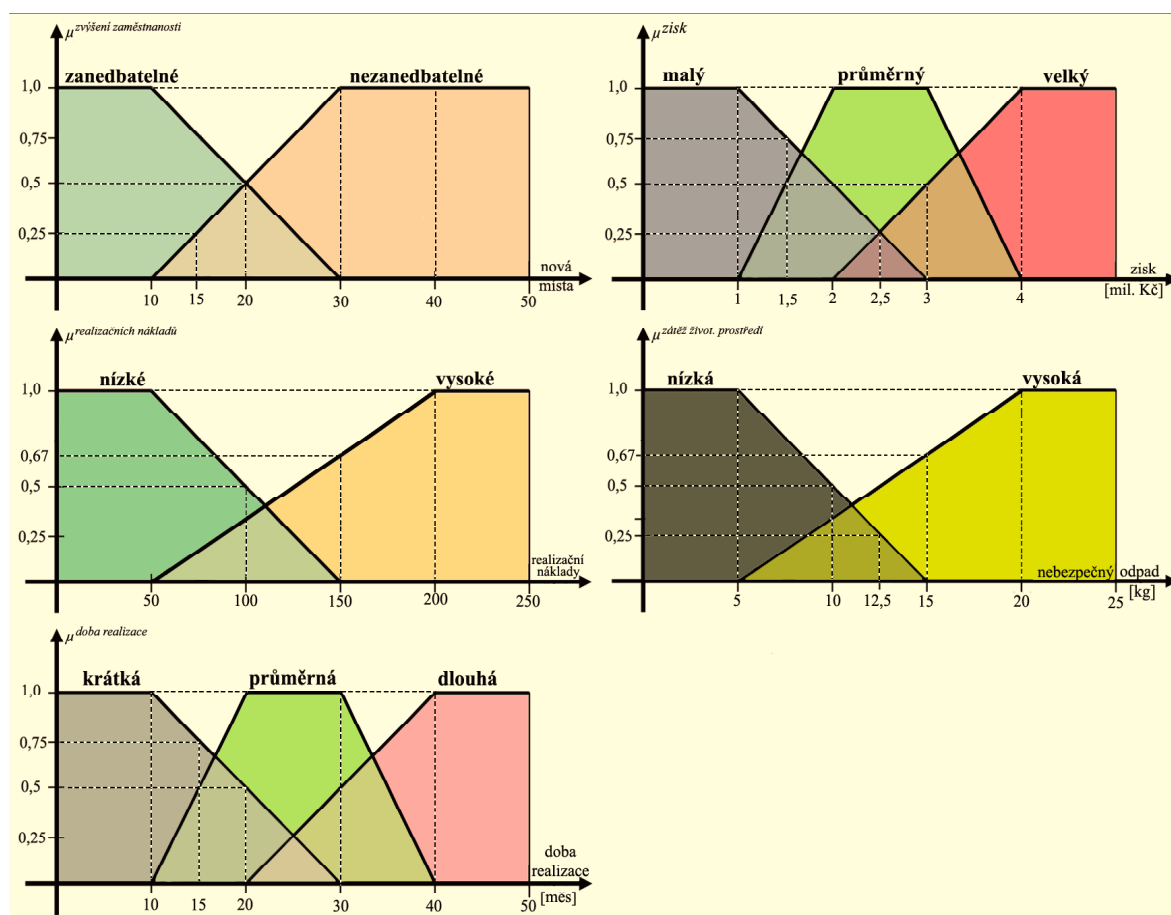
Při stanovení stupňů jistoty cílů a  $R_{c_j}$  a podmínek  $R_{p_j}$  lze postupovat v podstatě dvěma způsoby. Buď přímým odhadem stupňů jistoty odborníky, kteří posuzují jednotlivé varianty, nebo definováním charakteristických funkcí fuzzy množin cílů a podmínek, podle kterých bude možné potřebné stupně jistoty zjistit. Tj. bude nutno definovat

$$F_z^h = \{(x, \mu_z^h(x)); x \in U^h\}, \quad (6)$$

kde  $x \in U^h$  je pro variantu  $v_k$  uvedená hodnota plnění cíle nebo podmínky a  $U^h$  je univerzum hlediska  $h$ ,

z lingvistická hodnota cíle  $c_i$  nebo podmínky  $p_j$  a  $\mu_z^h(x)$  je charakteristická funkce  $z$ .

Tyto fuzzy množiny je zapotřebí definovat pro všechny použité lingvistické hodnoty (vágny pojmy)  $z$ , které se vyskytují se ve formulacích cílů a podmínek. Například na obr. 1 jsou uvedeny fuzzy množiny pojmů *malý*, *průměrný* a *velký*, které se týkají hlediska *zisk*, fuzzy množiny *nízké* a *vysoké* týkající se hlediska *realizačních nákladů* atd. Některé fuzzy množiny mohou být výsledkem operací *negace*, *sjednocení* nebo *průniku* množin. Například fuzzy množina *vysokých nákladů* může být považována jako doplněk *nízkých nákladů* nebo fuzzy množina *ne dlouhá realizační doba* může být vytvořena sjednocením fuzzy množin *krátká* a *průměrná* realizační doba atd.



1: Fuzzy množiny cílů a podmínek hodnocení

Základní operace s fuzzy množinami budou prováděny podle vztahů:

$$\mu_{\text{not } A}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad (7)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad (8)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \quad (9)$$

Další způsoby možné realizace těchto logických operací a jejich vlastností jsou uvedeny v literatuře (Novák, 1990), (Klir, 1998) atd.

Ve formulaci cílů a podmínek jsou poměrně často používány pojmy, které je zesilují nebo zeslabují.



Jsou to tzv. *jazykové operátory* a ve svém důsledku představují určitou transformaci fuzzy množiny. Například cílem  $c_i$  může být požadováno dosažení *spíše velkého zisku*. Pokud stupeň příslušnosti zisku  $z$  do množiny *velký zisk*  $\mu_1(z)$  je a stupeň příslušnosti  $\mu_2(z)$  do množiny *spíše velký zisk*, pak transformace musí zabezpečit relaci  $\mu_2(z) < \mu_1(z)$ . Možné způsoby transformace stupně příslušnosti  $\mu(z) \in \langle 0, 1 \rangle$  pro nejčastěji používané jazykové operátory (Negnevitski, 2002), jsou uvedeny v tabulce I.

I: Transformační funkce jazykových operátorů

Jazykový operátor	Transformace
více než	$\sqrt[3]{\mu}$
více méně	$\sqrt{\mu}$
spíše	$\mu^{1,3}$
velmi	$\mu^2$
značně	$\mu^3$

Uvedený cíl obsahuje operátor *spíše*, takže je-li variantou  $v_k$  nabízen zisk = 3 mil. Kč, (viz obr. 1) pak:

$$\mu_{\text{velký}}^{\text{zisk}}(3) = 0,5,$$

$$\mu_{\text{spíše velký}}^{\text{zisk}}(3) = 0,5^{1,3} = 0,41.$$

Podobně lze postupovat i při stanovení stupně pravdivosti podmínky uvedeného cíle. Je-li pro variantu  $v_k$  uvedena doba dosažení zadaného zisku 15 měsíců, pak stupeň příslušnosti k množině *krátká doba* je podle obr. 1 roven hodnotě 0,75. Podmnožina  $R_{c_i}$  bude jako  $k$ -tý prvek obsahovat dvojici  $(0,41; v_k)$  a podmnožina  $R_{p_j} = (0,75; v_k)$ .

Po výpočtu stupně pravdivosti cílů a podmínek  $p_j$  pro všechny zkoumané varianty rozhodnutí lze podle vztahů (2) a (3) vytvořit fuzzy množiny  $R_{c_j}$ ,  $R_{p_j}$  a výslednou podmnožinu variant  $R$ . Nejvhodnější bude ta varianta  $v_x \in R$ , která má největší stupeň jistoty.

Řešení dosažené tímto způsobem je tzv. pesimistické. Mnohdy se požaduje výběr takové varianty, která některý cíl a podmínku plní s největším stupněm jistoty. Tj.:

$$R = \bigcup_i R_{c_i} \cap R_{p_j}. \quad (10)$$

Formálně je v tomto případě ke každému cíli (podmínce) požadována i podmínka (cíle). V případě, že zadaný cíl (podmínka) nemá formulovanou podmínku (cíle), příslušná fuzzy množina je akceptována ve tvaru  $R_{p_j} = V$  nebo  $R_{c_i} = V = \{(1, v_1); (1, v_2); \dots; (1, v_n)\}$ .

### Akceptování vah cílů a variant

Velmi často je požadováno akceptování cílů a podmínek s určitým stupněm důležitosti, resp. váhou. Současně s tímto požadavkem vzniká také problém, jak tyto váhy stanovit. Manager obvykle přesný poměr vah dvou různých cílů nezná, ale dokáže říci, které cíle jsou *stejně důležité*, *důležitější*, *mnohem důležitější* nebo *značně důležitější*, atd. V literatuře, např. (Novák, 1990), je uváděna stupnice, kterou navrhl T. L. Saaty. V devítibodové škále jsou pojímům přiřazeny následující hodnoty:

1 – *stejná důležitost*, 3 – *mírně důležitější*, 5 – *významně důležitější*, 7 – *podstatně důležitější*, 9 – *absolutně důležitější*. Sudé hodnoty stupnice (vzhledem k obtížnosti jejich slovního vyjádření jednoduše vyplňují významovou mezeru mezi dvěma pojmy lichých hodnot.

Nechť poměr vah  $w_i$  všech  $r$  cílů a s podmínek vzhledem k váze  $w_k$  je vyjádřen stupněm důležitosti  $q_i = w_i/w_k$  pomocí uvedené škály hodnot. Tj.

$$(q_1, q_2, \dots, q_{r+s}) = \left( \frac{w_1}{w_k}, \frac{w_2}{w_k}, \dots, \frac{w_{r+s}}{w_k} \right), \quad (11)$$

resp.

$$(q_1, q_2, \dots, 1, \dots, q_{r+s}) = \left( \frac{w_1}{w_k}, \frac{w_2}{w_k}, \dots, 1, \dots, \frac{w_{r+s}}{w_k} \right). \quad (12)$$

Je-li váha  $w_k = 1$ , pak  $w_i = q_i$ . Pro zabezpečení často požadované podmínky  $\sum_i w_i = 1$  je nutno přepočítat váhy  $w_i$  pomocí vztahu:

$$w_i^o = \frac{q_i}{\sum_i^{r+s} q_i}. \quad (13)$$

Při akceptování těchto vah, jak uvádí (Klíř, 1988) nebo (Novák, 1990), bude stupeň pravdivosti splnění všech cílů a podmínek pro každou dílčí variantu rozhodnutí  $v_k$ , dán vztahem:

$$\mu^{v_k} = \sum_i^{r+s} w_i^o \mu^{h_i}, \quad (14)$$

což je vážený průměr stupňů pravdivosti  $\mu^{h_i}$ .

### DISKUSE

Předpokládejme, že vedení firmy má pro rozšíření výroby vybrat nový výrobek. Jako kandidáti se nabízejí výrobky  $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ . Pro výběr nejvhodnějšího jsou stanoveny cíle a podmínky uvedené v tabulce II.



## II: Cíle a podmínky volby výrobku

$c_i$	Cíle	$p_j$	Podmínky
1.	Dosažení spíše nadprůměrného zisku	1.	Krátká doba realizace výroby
2.	Nezanedbatelné zvýšení zaměstnanosti	2.	Nezatěžování životního prostředí
3.	Nízké realizační náklady		

Atributy těchto výrobků jsou uvedeny v tabulce III, kde např. pro výrobek  $V_2$  je uvedeno, že zajistí roční zisk 2,5 mil Kč a 40 nových pracovních míst při realizačních nákladech 100 mil. Kč. Potřebná doba realizace je 20 měsíců a jeho výroba bude zatěžovat životní prostředí 20 kg nebezpečného odpadu. Podobným způsobem lze interpretovat atributy dalších variant výrobků.

Před hodnocením výrobků, podle toho jak plní cíle a podmínky, je nutno poznamenat, že *dosažení nad-*

*průměrného zisku* bude chápáno jako dosažení *více méně velkého zisku*. To znamená, že stupně příslušnosti  $\mu_{\text{velký}}^{\text{zisk}}(z)$  je nutno dále přetransformovat na stupně příslušnosti

$$\mu_{\text{více méně velký}}^{\text{zisk}}(z) = \sqrt{\mu_{\text{velký}}^{\text{zisk}}} \quad (15)$$

Dále pak, podmínka *nezatěžování životního prostředí* bude chápána jako *nízká zátěž životního prostředí*.

## III: Atributy nových výrobků

Výrobek	Roční zisk [mil. Kč]	Počet nových pracovních míst	Realizační náklady [mil. Kč]	Doba realizace	Nebezpečný odpad [kg]
$V_1$	1,5	30	150	15	12,5
$V_2$	2,5	40	100	20	20,0
$V_3$	2,5	20	150	10	10,0
$V_4$	3,0	50	250	25	5,0
$V_5$	4,0	15	200	25	10,0

## IV: Plnění cílů a podmínek jednotlivými výrobky

Výrobek	Cíle			Podmínky	
	$\mu^{\text{zisk}}$	$\mu^{\text{prac. míst}}$	$\mu^{\text{náklady}}$	$\mu^{\text{doba ral.}}$	$\mu^{\text{prostř.}}$
$V_1$	0,00	1,00	0,67	0,75	0,25
$V_2$	0,50	1,00	0,50	0,50	0,00
$V_3$	0,50	0,50	0,67	1,00	0,50
$V_4$	0,71	1,00	0,00	0,25	1,00
$V_5$	1,00	0,25	0,00	0,25	0,50

Vyhodnocení plnění cílů a podmínek, přesněji řečeno, zjištění s jakým stupněm jistoty jsou plněny,

je uvedeno v tabulce IV. Praktické stanovení stupně jistoty cíle znamená (ve většině případů) odečtení této hodnoty z grafu charakteristické funkce fuzzy množiny lingvistické hodnoty, která reprezentuje tento cíl, na základě hodnoty příslušného atributu. Například varianta výrobku  $V_1$  slibuje realizační náklady ve výši 150 mil. Kč. Pak podle odpovídající fuzzy množiny na obr. 1 zjistíme  $\mu_{\text{nízké}}^{\text{náklady}}(150) = 0,67$ . Podobně, až na hledisko *zisk*, kde je nutno použít transformaci podle vzorce (13), lze získat stupně příslušnosti plnění všech cílů a podmínek zkoumaných variant a sestavit množiny:

$$\begin{aligned}
 R^{\text{zisk}} & \quad \{(V_1; 0), & (V_2; 0,5), & (V_3; 0,5), & (V_4; 0,71), & (V_5; 1)\}, \\
 R^{\text{prac. míst}} & \quad \{(V_1; 1), & (V_2; 1), & (V_3; 0,5), & (V_4; 1), & (V_5; 0,25)\}, \\
 R^{\text{náklady}} & \quad \{(V_1; 0,67), & (V_2; 0,5), & (V_3; 0,67), & (V_4; 1), & (V_5; 1)\}, \\
 R^{\text{doba real.}} & \quad \{(V_1; 0,75), & (V_2; 0,5), & (V_3; 1), & (V_4; 0,25), & (V_5; 0,25)\}, \\
 R^{\text{prostř.}} & \quad \{(V_1; 0,25), & (V_2; 0), & (V_3; 0,5), & (V_4; 1), & (V_5; 0,5)\},
 \end{aligned} \quad (16)$$



Podmnožina variant, která splňuje všechny cíle a podmínky, je podle vztahu (1) průnikem všech množin (16) provedeným podle operace (8), tj.

$$R = \{(V_1, 0), (V_2, 0), (V_3, 0,5), (V_4, 0,25), (V_5, 0,25)\}. \quad (17)$$

Podle vztahu (5) má největší stupeň jistoty varianta  $V_3$ , a tedy vedením firmy by měl být pro realizaci zvolen tento výrobek.

Nechť jednotlivým hlediskům jsou nyní přiděleny stupně důležitosti, které odrážejí poměr váhy příslušného hlediska k váze přidělené době realizace takto:

1 – *doba realizace* ( $w_{dr}$ ), 2 – *zaměstnanost* ( $w_{zam}$ ), 5 – *životní prostředí* ( $w_{zp}$ ), 5 – *náklady* ( $w_{nák}$ ), 7 – *zisk* ( $w_{zisk}$ ). V souladu se vztahem (12)

$$\{7, 2, 5, 1, 5\} = \left\{ \frac{w_{zisk}}{w_{dr}}, \frac{w_{zam}}{w_{dr}}, \frac{w_{nák}}{w_{dr}}, \frac{w_{dr}}{w_{dr}}, \frac{w_{zp}}{w_{dr}} \right\} \quad (18)$$

a při  $w_{dr} = 1$ , lze podle vztahu (13) získat váhy:

$$W_o = \{w_o^{zisk}, w_o^{zam}, w_o^{nák}, w_o^{dr}, w_o^{zp}\} = \{0,35; 0,1; 0,25; 0,05; 0,25\} \quad (19)$$

Podle vztahu (14), stupňů jistoty plnění dílčích cílů a podmínek variant uvedených v množinách (16) a vah  $W_o$  dostaneme výslednou množinu

$$R_o = \{(V_1, 0,37), (V_2, 0,43), (V_3, 0,57), (V_4, 0,86), (V_5, 0,76)\}. \quad (20)$$

Očividně největší stupeň jistoty s akceptováním zadaných vah hledisek má výrobek  $V_4$ , následovaný výrobkem  $V_5$ . Snadno se lze přesvědčit, že kdyby všechna hlediska měla stejný stupeň důležitosti (všechny váhy budou 0,2), největší stupeň jistoty bude mít opět výrobek  $V_4$ , ale následovaný výrobkem  $V_3$ .

## ZÁVĚR

Z výkladu i příkladu použití je patrné, že uvedená metoda výběru varianty je velmi jednoduchá. V praxi lze nalézt řadu dalších příkladů pro její aplikaci. Např. při konkurzním řízení na obsazení pracovního místa, prognózování výsledků voleb, výběru projektů, výběru dodavatelů komponent výrobků nebo surovin, atd.

Metoda bez akceptování vah je o něco jednodušší, ale značně pesimistická, stačí jeden chybně stanovený stupeň jistoty a postižená varianta může být z rozhodovacího procesu vyloučena. Varianta s použitím vah je z tohoto pohledu mírnější. Je to v důsledku použití jiného pravidla při řešení průniku fuzzy množin a defuzzifikace.

## SOUHRN

Příspěvek je zaměřený na jednoduchou metodu podpory rozhodovacího procesu v jeho závěrečné fázi, tj. při volbě varianty z množiny přípustných variant využitím fuzzy množin. V příspěvku jsou uvedeny dva přístupy: jeden bez akceptování vah hledisek výběru variant a druhý s akceptováním vah hledisek, včetně metody snadného stanovení vah jednotlivých hledisek.

Přístupy jsou dokumentovány příkladem rozhodování o volbě nového výrobku pro rozšíření výroby. Jako hlediska rozhodování jsou zvoleny náklady, zisk, zvýšení zaměstnanosti, doba realizace a vliv na životní prostředí.

rozhodovací proces, výběr varianty, fuzzy množiny, hlediska rozhodování, váhy hledisek

## LITERATURA

- KLIR, G. J.: Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information. Prentice Hall, New Jersey, 1988. ISBN 0-13-345984-5.  
NEGNEVITSKY, M.: Artificial Intelligence. Addison Wesley, 2002. ISBN 0-201-71159-1.

NOVÁK, V.: Fuzzy množiny a jejich aplikace. SNTL Praha, 1990. ISBN 80-03-00325-3.

RÁBOVÁ, I., KONEČNÝ, V., MATIÁŠOVÁ, A.: Decision making with support of artificial intelligence. Agricultural Economics. 2005. sv. 51, č. 9, s. 385–388. ISSN 0139-570X.

## Adresa

Doc. Ing. Vladimír Konečný, CSc., Ústav informatiky, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, Zemědělská 1, 613 00 Brno, Česká republika, e-mail: konecny@mendelu.cz



