

KONEČNĚ-PRVKOVÝ EFEKTIVNÍ NÁVRH KONSTRUKCE KYTARY

V. Dániel, P. Koňas

Došlo: 20. listopadu 2005

Tato práce zvítězila na mezinárodní soutěži studentské vědecké a odborné činnosti ve Zvolenu v květnu 2005.

Abstract

DÁNIEL, V., KOŇAS, P.: *FEM effective suggestion of guitar construction*. Acta univ. agric. et silvic. Mendel. Brun., 2006, LIV, No. 2, pp. 23–30.

Modal analysis of the whole guitar construction was performed. The results of eigenfrequencies were obtained. Stress in strings affects not only static loading of material, but also shift of eigenfrequencies. From obtained natural frequencies for solved spectrum such frequencies were used which coincides with assumed ribs new positions of ribs were suggested. Other ribs which do not carry out the mechanical function were removed. Also static reaction was evaluated and new position of ribs was adjusted. For final model new eigenfrequencies were computed and compared with previous ones. Significant changes were revealed in low frequencies (below 400 Hz) where fewer amounts of natural shapes were obtained. Approximately 50% were lost by adding of ribs. For chosen frequencies of equal temperament the harmonic analysis was performed. The analysis proved ability of oscillation for frequencies far of natural frequencies. The final model satisfies the requirement of minimization of static stress in material due to strings and allows very effective oscillation of top the guitar resonance board. In comparison with literature good agreement in amplitude size of front board and amount of modes in appropriate frequencies were achieved. Suggested model even offers higher amount of natural shapes in comparison with literature, namely in high frequencies. From additional comparison of eigenfrequencies and natural shapes the influence of ribs position on natural shapes was approved.

guitar, acoustics, optimization, modal analysis, harmonic analysis, ANSYS, finite element method (FEM)

Vliv na akustické vlastnosti dřeva mají především elastické vlastnosti dřeva podél a napříč vláknité struktury dřeva, rychlosti šíření zvuku uvnitř materiálu a útlum zvuku, který je zapříčiněn útlumem energie kmitání (Bucur, 1995). Dřevo jako přírodní materiál má mnoho růstových vad a také se u něj objevují vady vzniklé při sušení a výrobě. K výrobě hudebních nástrojů se používá smrk s maximálně homogenní strukturou a nejnižším podílem letního dřeva (Rajčan, 1998), resp. s nejnižší hustotou. Pro některé výrobce má však větší význam stejnoměrnost letokruhu než podíl letního dřeva (Erdélyi, 1998). U dřeva se vyskytují vady, které mají velký vliv na akustické vlastnosti. Je to především napětí uvnitř materiálu, které vzniká při sušení.

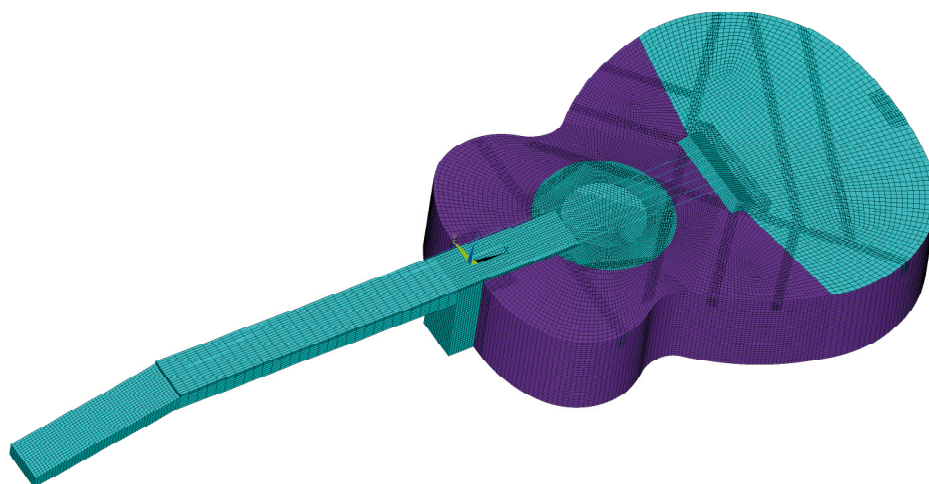
MATERIÁL A METODIKA

Úloha stanovení efektivní polohy žeber spolu s příslušnou optimalizační, strukturální a modální analýzou byla řešena vytvořením konečně-prvkového modelu odvozeného z geometrie skutečného hudebního nástroje. Pro plnou parametrizaci byl použit programovací jazyk APDL z numerického řešiče ANSYS. V geometrii došlo k drobnému zjednodušení v oblasti krku, který slouží jen pro napínání strun do odpovídající vzdálenosti a směru. Naopak pro vytvoření korpusu jsme použili co nejpřesnější kopii skutečnosti.

Pro modelování strun ve výše uvedené kombinaci fyzikálních problémů (strukturální a modální analý-

zy) a s ohledem na požadavek zahrnutí předpětí strun byl vybrán typ elementu LINK10. Element umožňuje zadat i hodnotu počáteční deformace větší než 2 % (orientační maximum pro Hookův zákon). U deskových materiálů byl použit element typu SHELL99 při rozšiřování korpusu kytary, tj. přední desku, luby a zadní desku. Každá vrstva má příslušný definovaný

odklon elementové souřadné soustavy a materiálové vlastnosti. Elementu byly přiřazeny elastické vlastnosti ortotropního charakteru spolu s izotropní hustotou materiálu a koeficientem útlumu. Všechny ostatní části jsou i v modelu formovány jako objemová tělesa, která byla rozšiřována lineárním typem elementu SOLID45 (Obr. 1).



1: Konečně-prvková síť modelu kytary (81831 elementů, 168346 uzlů)

Jelikož maximální napětí vzniká zpravidla v oblasti uchycení kobylinky k přední desce, byla pro zvětšení pevnosti této desky na spodní straně nalepena žebra. Tyto části kytary jsou vyrobeny z rezonančního smrku a v modelu byly proto použity (materiálové) vlastnosti tohoto materiálu (Bucur, 1995). Pro hodnocení

stavu napjatosti byla použita energetická kritéria Von Mises a Hoffmanovo kritérium. Protože meze pevnosti v tahu a tlaku jsou u dřeva obecně různé (Šlezingerová, Gandelová; 1994), bylo Hoffmanovo kritérium při hodnocení upřednostněno (Rov. 1).

$$I = A(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + B(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + D\sigma_2^1 + E\sigma_2^2 + F\sigma_3^2 + 2G\sigma_{23}^2 + 2H\sigma_{31}^2 + 2I\sigma_{12}^2,$$

kde:

$$A, B, \dots, I = f(\sigma_L^C, \sigma_L^T, \sigma_R^C, \sigma_R^T, \sigma_T^C, \sigma_T^T, \sigma_{LR}^P, \sigma_{RT}^P, \sigma_{LT}^P)$$

Rov. [1]

Hoffmanovo energetické kritérium vyjadřuje energii, kterou musíme dodat celému systému, aby došlo k porušení. K porušení dojde v případě, kdy je pravá strana rovnice Rov. [1] větší než jedna. Výstupem je normovaný skalár. Výhodou je, že zahrnuje i smykové složky napětí (u dřeva je mez pevnosti ve smyku nejnižší) a rozlišuje mezi vlastnostmi v různých směrech namáhání (tahu a tlaku) (Javořík, 2000). Modelované zatížení má dvojí charakter. Jedná se o statické zatížení způsobené napětím strun a dynamické namá-

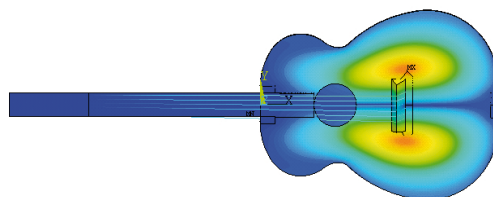
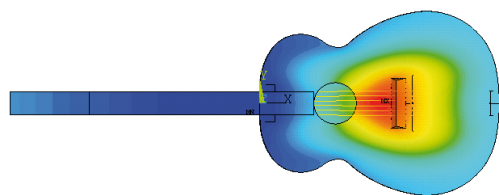
hání vznikající od strun při jejich kmitání. Výpočet tak má dvě fáze, výpočet statického zatížení a následný výpočet dynamického zatížení. Postup řešení tedy rozdělíme do tří oblastí. V první části (statické strukturální analýze) kmitání strun zanedbáváme, v druhé části (modální analýze) získáme pouze hodnoty rezonančních frekvencí vlastních kmitů a vlastní tvary příslušející těmto frekvencím. Ve třetí části (harmonické analýze) simulaci nuceného kmitání při konkrétní frekvenci získáme hledaný stav napjatosti zkoumané

struktury. Při modální a harmonické analýze je zahrnuto předpětí ze strukturální analýzy. Výsledné chování je ve velké míře podmíněno pozicemi a tvarem jednotlivých žebër. Pozice žebër a jejich průřezy budou jedním z rozhodujících výstupů celého modelu. Hudební rozsah kytary je omezen na jedné straně nejhlubší strunou E_6 (E), které odpovídá frekvence temperovaného ladění 82,4 Hz a pro horní hranici jsme zvolili tón e^3 , kterému odpovídá frekvence temperovaného ladění 1318,4 Hz. Pro efektivní návrh konstrukce používá programový balík ANSYS několik odlišných metod. V naší úloze byla použita metoda, kdy program náhodně volí hodnoty uživatelem zvoleného parametru (ve zvoleném rozsahu). Výslednou množinu hodnot lze následně zpracovat konvenčními statistickými metodami, stanovit (existuje-li) regresní závislost mezi zvolenými parametry a výsledným chováním (stavem napjatosti, deformace, porušení...) a určit nejefektivnější parametry konstrukce.

VÝSLEDKY A DISKUSE

Modální analýza

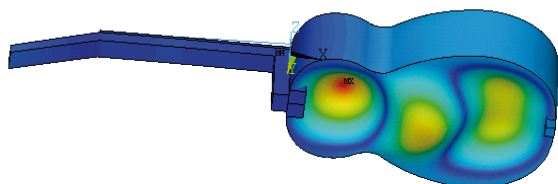
Byly získány dva výsledkové soubory pro vlastní frekvence kmitání. Zabývali jsme se pouze frekvencemi od 16 Hz (mez slyšitelnosti) po 1320 Hz, což představuje tón e^3 , který je takřka jeden z nejvyšších standardně používaných tónů. První soubor výsledků znázorňuje kytaru bez žebër, ve které nebylo použito ani slepení zad se špalky. Na zádech tak vidíme přímo mody kmitání, které vyjadřují volné kmitání desky konkrétního tvaru. Přední deska je již slepena se špalky a zároveň je k ní přilepena kobylka, na kterou jsou napnuty struny. Druhý soubor výsledků zahrnuje kytaru modelovanou spolu s žebry. Níže jsou umístěny některé grafické výstupy pro vybrané mody kmitání. Stupnice a barva na všech obrázcích vyjadřuje relativní posunutí bodů, ze kterých lze porovnat jednotlivé mody proti ostatním (Obr. 2).



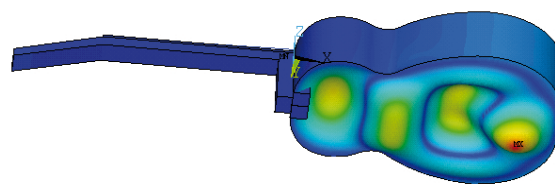
2: Mod 4 (77,7 Hz) – vlevo; mod 7 (140,7 Hz) – vpravo (umístěním uzlů 0,0 a 0,1)

Velmi podobného vlastního tvaru dosahují i záda kytary. Těm odpovídá vlastní frekvence 62,5 Hz pro tvar uzlů 0,0 a 118 Hz pro tvar uzlů 0,1. Z toho můžeme usuzovat, že napětí v přední desce způsobuje

pouze posun vlastních frekvencí proti volnému kmitání. Vlastní kmity nejsou ničím ovlivňovány a tvary se dají i odhadnout. Na obrázcích č. 3 a 4 jsou vlastní tvary vhodné pro dvě a tři žebra.



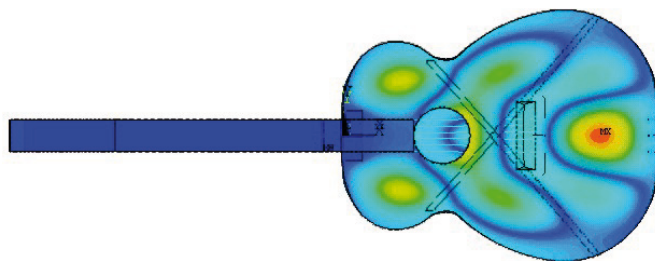
3: Mod 13 (255,2 Hz) odpovídá umístění dvou žebër



4: Mod 24 (413,7 Hz) odpovídá umístění tří žebër

Na obrázcích 2, 3 a 4 si můžeme všimnout, že přidáním každého dalšího uzlu v daném směru se zdvojnásobuje frekvence kmitání. To bylo již dokázáno podle (Jansson, 1971). Pro vhodné umístění žebër je důležité najít místa, která by netlumila volné kmitání

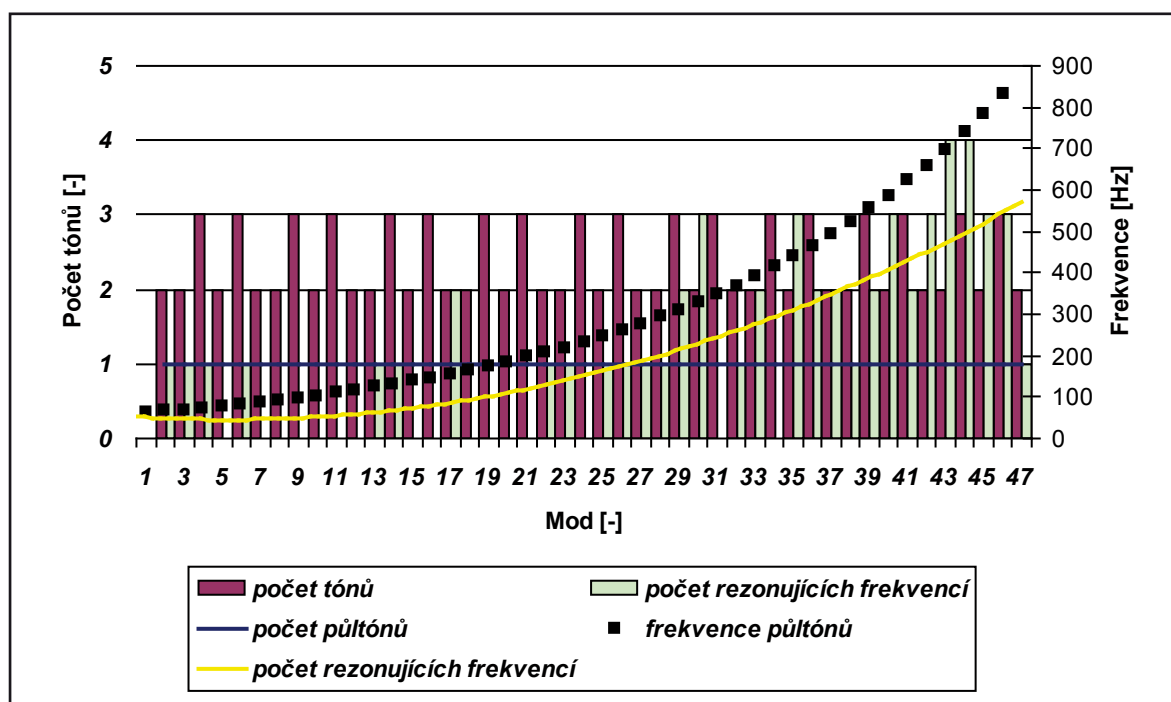
rezonanční desky. Vypočtený tvar kmitání na obrázku č. 5 věrně kopíruje polohu žebër ve tvaru X. V takovém případě nedochází ani při vysoké pevnosti žebër k útlumu akustického výkonu.



5: Mod 35 (549,8 Hz) odpovídá umístění žeber

Nejnižší frekvencí nuceného kmitání je frekvence struny E_6 s nejhlubším tónem E (82,4 Hz). Z výsledků vyplývá, že jediné vlastní kmity, které mají nižší frekvenci, jsou mody bez uzlů. Jelikož k efektivnímu přenosu mechanického kmitání a jeho vhodného akustického projevu je potřeba velké plochy, zanedbáme

mody, kdy kmitají jiné části kytary než desky korpusu. Zbývají tak pouze mody 2 (62,6 Hz), kde kmitá deska zad, a mod 4 (77,7 Hz), kdy kmitá přední deska. Srovnání spočtených vlastních frekvencí s frekvencemi temperovaného ladění je uvedeno v grafu (Obr. 6).



6: Rezonanční schopnosti nástroje (dle počtu tónů mezi frekvencemi příslušných pultónů) – srovnání pro frekvence pultónů v temperovaném ladění

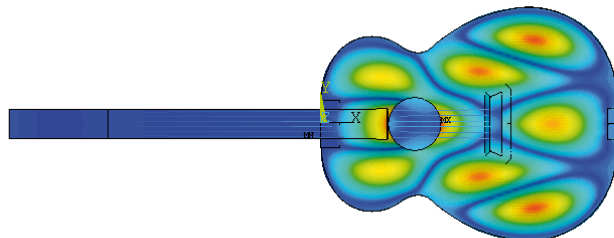
Vypočtené mody velmi dobře kopírují požadavky na kmitání pro jednotlivé pultóny. Ve vyšších frekvencích dokonce tyto požadavky výrazně převyšují (srovnej počet rezonančních frekvencí a počet pultónů (žlutá a modrá křivka)). Při srovnání počtu tónů (červená barva) mezi frekvencemi příslušných sousedních pultónů (černá barva) a počtem rezonančních

frekvencí (zelená barva) v tomto rozsahu jsou patrné lepší rezonanční schopnosti nástroje ve vyšších frekvencích oproti nižším hodnotám frekvencí.

Po provedení modální analýzy kytary s žebry podle existujícího modelu došlo ke ztrátě většiny modů pro nízké frekvence. K rozkmitání přední desky při nízkých frekvencích takřka nedochází, první náznaky se

objevují až kolem frekvence 188 Hz. Tomu odpovídá až tón malé fis. Ve velké oktávě tak došlo k absolutnímu útlumu. Pro kmitání ve vyšších frekvencích

již žebra nemají velký význam. Pro stanovení návrhu polohy žebor jsme vycházeli z jednotlivých vypočtených modů. Jeden je vidět na obrázku č. 7.



7: Mod 31 (507,9 Hz)

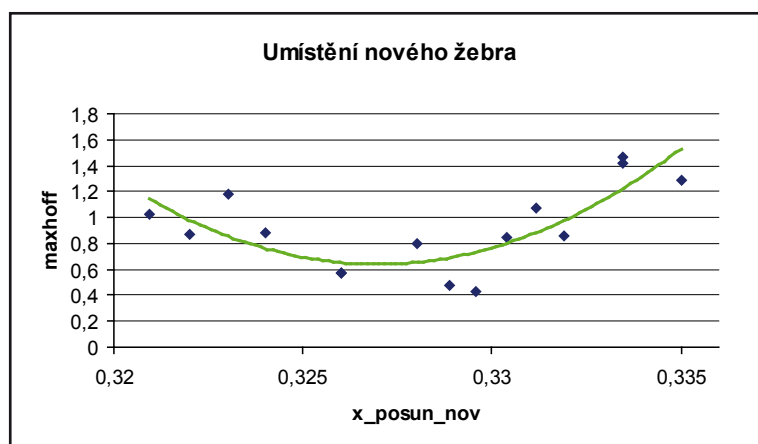
V přední části kolem hmatníku vidíme místa s nulovou výchylkou. Do této oblasti bychom mohli umístit žebra, aniž bychom utlumili kmitání. Takováto pozice žebor se vyskytuje i u jiných nástrojů, jako housle, nebo známá kytara s efy od firmy Gibson. Pokud spojíme předem popsané návrhy, získáváme konkrétní představu nového žebrování. Toto nové žebrování by nemělo mít vliv na kmitání u konkrétně vybraných frekvencí. Pro ostatní frekvence dynamickou odezvu neznáme. Musíme proto nakonec provést i výpočet dynamické analýzy i pro novou konstrukci.

STRUKTURÁLNÍ ANALÝZA A OPTIMALIZACE

První výpočet statického zatížení byl proveden pro model, ve kterém jsou navržena žebra podle reálných (existujících) tvarů kytar. S pomocí orientačního vypočteného Von Misesova kritéria pro jednotlivé modelové situace jsme navrhli postup optimalizace jednotlivých prvků. Jelikož žebra ve tvaru X svírají úhel odpovídající vlastnímu tvaru, optimalizovali jsme pouze polohu jejich průřezu. Místo s největším napětím je v okolí kobylky. Žebra umísťována za

ním nejsou schopna napětí dostatečně utlumit, a proto jsme navrhli nové žebro v těsné blízkosti za kobylkou. Jeho úhel jsme volili podobný existujícím žeborům. Dále se jako místo s lokálním nárůstem napětí ukázalo okolí kruhového otvoru.

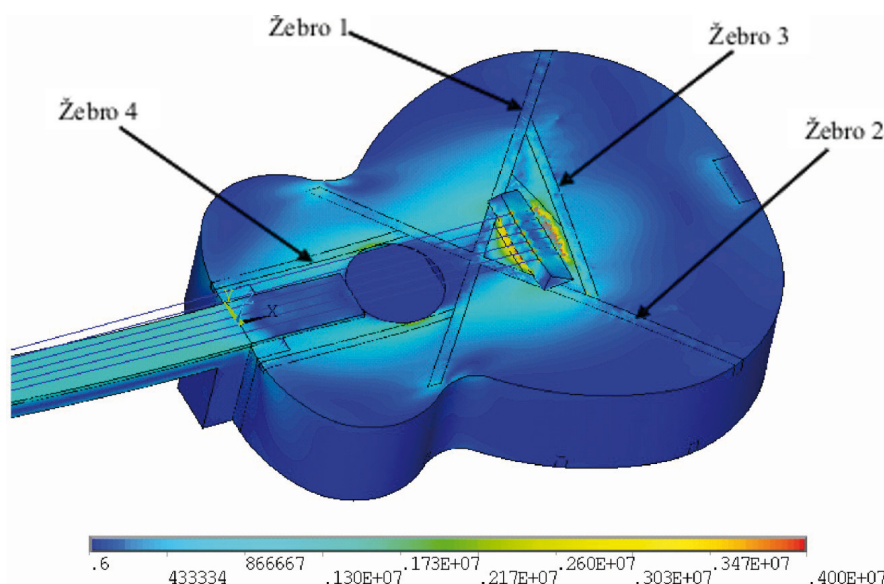
Jako první byl proveden výpočet pro optimalizaci žebor ve tvaru x. Tato optimalizace spočívala v nalezení polohy průřezu žebor ve tvaru X. Jako optimalizační kritérium bylo zvoleno Hoffmanovo energetické kritérium. Dále byla provedena optimalizace změny úhlu u žebor nad a pod kruhovým otvorem. Ideální pozice byla nalezena rovnoběžně s osou kytary a co nejblíže kruhovému otvoru. Po provedené sérii výpočtu lze nakonec vytvořit nové žebro, pro které model nabývá minimální hodnoty Hoffmanova kritéria z vypočítané množiny modelů. V tomto případě se jedná o pozici průřezu žebor v poloze (242;0;0) a úhel alfa má velikost 0° (žebra jsou paralelně s osou kytary). Abychom získali odhad efektivní (optimální) polohy žebor, určíme lokální extrém (minimum) z regresní závislosti spočtených hodnot Hoffmanova kritéria a příslušného posunutí průřezu z množiny provedených výpočtů (Obr. 9).



9: Určení efektivní polohy nového žebra podle Hoffmanova kritéria (maxhoff=maximum hodnoty Hoffmanova kritéria, x_posun_nov=poloha průřezu žebra s osou kytary)

I když již zde můžeme provést významné závěry, je nutné připomenout, že jednotlivé hodnoty nemusí být reprezentativní. Velký rozptyl hodnot maxhoff je způ-

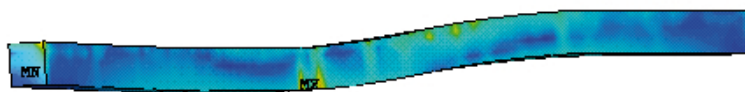
soben stejnými příčinami jako v první optimalizační analýze. Jako optimální jsme určili hodnotu (325;0;0) hrany nového žebra (Obr. 10).



10: Rozložení Von Misesova energetického kritéria pro efektivní polohu průsečíku žebor

Pro výrobu modelu jsou důležité nejen polohy jednotlivých žebor, ale také jejich rozměry. Jelikož průřez žebor byl pro jednoduchost obdélníkového tvaru, musíme se nyní vrátit ke konkrétním žeborům a pro-

vést detailní hodnocení možnosti porušení. Na obrázku č.11 je uvedeno jedno analyzované žebro s vypočteným rozložením Von Misesova kritéria.



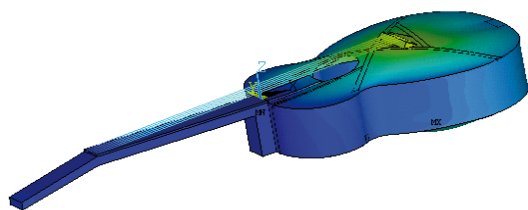
11: Von Misesovo energetické kritérium pro žebro 1

V místech s nejnižší hodnotou (modrá barva) nedochází k tak výraznému namáhání a lze proto uvažovat o snížení rozměrů, popř. celkového tvaru žebor. Snížení množství hmoty žebor má za následek také zvýšení schopnosti mechanického kmitání.

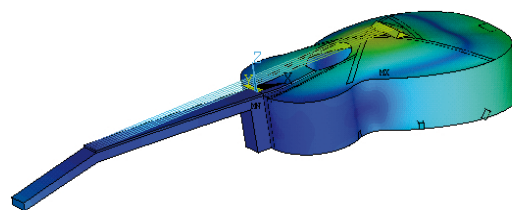
MODÁLNÍ ANALÝZA NAVRŽENÉHO (EFEKTIVNÍHO) MODELU

Podle popsaného postupu jsme zhotovili nový návrh žebrování. Snažili jsme se o minimalizaci Hoffmanova energetického kritéria. Záměrem však bylo optimalizovat

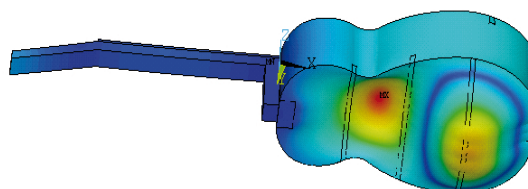
akustické vlastnosti. V modech 1, 2, 3 a 5 nedochází ke kmitání desek kytary, ale ke kmitání celého korpusu či krku. Mohli bychom se tak domnívat, že takovýto model vůbec nemůže tvořit zvuk v nízkých frekvencích (pod 400 Hz). Stejných výsledků bylo dosaženo podle (Caldersmith, 1995) pro klasickou kytaru. Naměřený akustický tlak dosáhl minima až při frekvenci kolem 190 a 215 Hz, jemuž odpovídal tvar 0,0. Vlastnímu tvaru 1,0 odpovídá frekvence 235 Hz. Četnost naměřených vlastní módů je dokonce v oblasti nízkých frekvencí nižší. Námi vypočtené odpovídající vlastní tvary dokumentují obrázky č. 12–14.



12: Mod 4 (170 Hz)



13: Mod 6 (217 Hz)

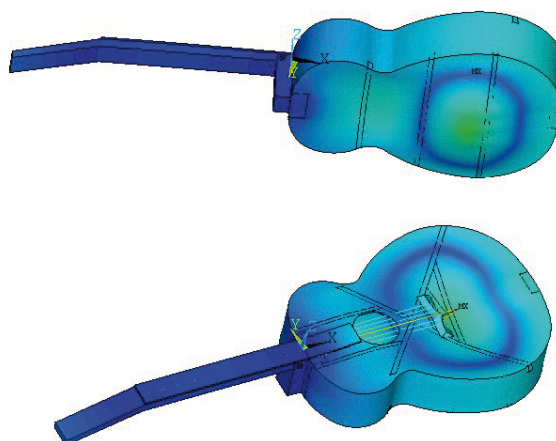


14: Mod 7 (251 Hz)

Vidíme, že vypočtené frekvence jsou prakticky totožné s literaturou, i přesto, že se v literatuře jedná o klasickou kytaru. Výstupy z modální analýzy navrženého modelu popisují velikost vlivu žeber na vlastní frekvence. Z modální analýzy známe vlastní tvary a rezonanční frekvence. Ty však neodpovídají požadavkům pro kmitání podle temperovaného ladění. Proto provedeme simulaci nuceného kmitání konkrétní frekvenci v harmonické analýze.

HARMONICKÁ ANALÝZA NAVRŽENÉHO (EFEKTIVNÍHO) MODELU

Nucené kmitání mělo frekvenci 261,6 Hz a bylo způsobeno silou 5 N. Tato frekvence odpovídá tónu c¹ na struně h. Rozložení celkového posunutí je zobrazeno na obrázku č. 15.



15: Rozložení posunutí při nuceném kmitání frekvencí 261,6 Hz

Jelikož je ukotvení již skutečné, můžeme přímo odečítat posunutí z obrázku. Kmitání přední i zadní plochy má velikost přibližně 3 μm . Podle (Ecaché, 2001) horní deska kmitá s amplitudou 20 μm a účinně přenese kmitání na okolní vzduch. Podle výpočtu

Hoffmanova kritéria bylo zjištěno, že velikost napětí způsobené mechanickým kmitáním při frekvenci 261,6 Hz má velikost jen 1/10 napětí statického způsobeného strunami. Tvar tohoto nuceného kmitání je prakticky totožný s vlastním tvarem o frekvenci

251 Hz. Tento tvar odpovídá modu 0,0 přední desky, viz obr. 9 a 10. Všechny nižší frekvence tedy musí kmitat v podobném tvaru. Zadní deska má již mod 0,1 viz obr. 11, tedy pro nižší frekvence se může objevit ještě tvar 0,0.

SOUHRN

Byla provedena modální analýza celé konstrukce bez žeber. Výsledkem je souhrn vlastních frekvencí kmitání. Napětí ve strunách způsobuje nejenom statické namáhání materiálu, ale také posun vlastních frekvencí kmitání. Ze znalosti vlastních tvarů pro řešené spektrum byly vybrány vlastní tvary odpovídající předpokládaným žebřům a navrženy konkrétní polohy. Ostatní žebra, která již neplní mechanickou funkci, byla odstraněna. Byla rovněž vypočtena statická odezva a upraveny pozice nových žeber. Pro výsledný model byly vypočteny frekvence vlastních kmitů. Ty byly porovnány s kmity původními. Změny nastaly pouze v nízkých frekvencích (pod 400 Hz), kde se snížila četnost modů. Přidáním žeber se ztratilo 50 % vlastních tvarů. Pro vybrané frekvence temperovaného ladění jsme provedli i harmonickou analýzu. Ta dokázala schopnost kmitání i pro frekvence velmi vzdálené vlastním frekvencím. Výsledný model odpovídá jednak minimalizaci statického napětí uvnitř materiálu způsobeného strunami, a také umožňuje velice efektivní kmitání horní rezonanční desky kytary. V porovnání s literaturou byla nalezena shoda ve velikosti amplitudy kmitání přední desky i v četnosti modů a jim odpovídajících frekvencích. Navržený model dokonce vykazuje větší množství vlastních tvarů než bylo naměřeno v literatuře, a to zejména při vysokých frekvencích. Z porovnání hodnot vlastních frekvencí a vlastních tvarů jsme dokázali, že poloha žeber zpětně ovlivňuje i vlastní tvary.

kytara, akustika, optimalizace, modální analýza, harmonická analýza, ANSYS, metoda konečných prvků (MKP)

PODĚKOVÁNÍ

Práce je výsledkem řešení projektu 6215648902 MŠMT ČR.

LITERATURA

- BUCUR, V.: *Acoustics of Wood*, Nancy, France, Institut National de la Recherche Agronomique Centre de Recherches Forestieres, 1995.
- CALDERSMITH, G.: *Designing a Guitar Family*, Caldersmith Luthiers, Australia, 1995.
- CHAIGNE, A.: *Numerical Simulations of Stringed Instruments-Today's Situation and Trends for the Future*, UER de Mécanique, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Palaiseau, France, 2002.
- ERDÉLYI, S., Nicolini, G.: *A Kónya Család*, Media-Press Bt., Budapest-Cremona, 1998.
- ECACHE, E., CHAIGNEY, A., DERVEAUX, E., JOLY, P.: *Numerical Simulation of a Guitar*, In Ondes élastiques dans les solides, INRIA-Rocquencourt, 2001.
- JANNSON, E.: A study of acoustical and hologram interferometric measurements on the top plate vibrations of a guitar, *Acustica*, 1971, 25
- JAVOŘÍK, J.: *Modelování mechanického chování dřeva metodou konečných prvků*, Programy a algoritmy numerické matematiky 10. Praha, AV ČR, 2000
- POŽGAJ, A., CHOVANEC, D., KURJATKO, S., BABIAK, M.: *Štruktúra a vlastnosti dreva*, Bratislava, Príroda, 1997.
- RAJČAN, E.: *Akustika I*, Technická univerzita vo Zvolene, 1998.
- ŠLEZINGEROVÁ, J., GANDELOVÁ L.: *Stavba dřeva*, Brno, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, 1994.

Adresa

Ing. Vladimír Dániel, Ing. Petr Koňas, Ph.D., Ústav nauky o dřevě, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, Zemědělská 3, 613 00 Brno, Česká republika